

Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Ist s eine durch die Gleichung $F(s, z) = 0$ definirte algebraische Function von z , so kann nach *Riemann* (s. dessen Abhandlung über *Abelsche* Functionen, Band 54. dieses Journals) jede wie s verzweigte algebraische Function s' von z rational durch s und z ausgedrückt werden. Wird die Function s' in m Punkten der Fläche T , welche die Verzweigungsart angiebt, unendlich erster Ordnung, so enthält dieselbe nach §. 5. der erwähnten Abhandlung $m - p + 1$ willkürliche Constanten. Schon die a. a. O. untersuchte Bedingung der Existenz von Functionen, die in weniger als $p + 1$ Punkten unendlich werden, zeigt, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Constanten eine grössere sein kann. Dies kann aber auch Statt finden, wenn m grösser als p ist. Ist z. B. s' der Quotient zweier Functionen φ , so wird s' in den $2p - 2$ Punkten unendlich, in denen der Nenner gleich Null ist (s. §. 10. der citirten Abhandlung), und enthält so viele willkürliche Constanten, als die den Zähler bildende Function, nämlich p , während die Zahl $m - p + 1$ im vorliegenden Falle gleich $p - 1$ ist. Sind dagegen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ solche Functionen φ , welche in $p - 1$ Punkten unendlich klein zweiter Ordnung werden, deren Quadratwurzeln *Riemann* *Abelsche* Functionen nennt, so giebt es eine gewisse Anzahl von Ausdrücken $\sqrt{\frac{\varphi_1\psi_1}{\varphi_2\psi_2}}$, welche rationale Functionen von s und z sind; diese enthalten in der That $p - 1$ Constanten in linearer Weise, ein Satz, der von *Riemann* herrührt und für welchen ein Beweis in der folgenden genauen Bestimmung der Constanten-Anzahl mit enthalten ist.

Der allgemeinste Ausdruck eines Integrals zweiter Gattung, welches in m Punkten ε unendlich erster Ordnung wird, ist

$$v = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

(Vergl. §. 5. der *Riemannschen* Abhandlung.) Hierbei sind unter $t_1 \dots t_m$ specielle Integrale zweiter Gattung zu verstehen, welche beziehlich in den Punkten $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$ unendlich werden wie $\frac{1}{\sigma_1} \dots \frac{1}{\sigma_m}$, wenn σ_k eine Grösse bedeutet,

die in ε_k unendlich klein erster Ordnung genannt wird. Damit v in eine algebraische Function s' übergehe, müssen sämtliche Periodicitätsmoduln von v verschwinden. Hieraus ergeben sich $2p$ lineare Bedingungsgleichungen zwischen den $m + p$ Constanten β und α , so dass $m - p + 1$ willkürliche Constanten bleiben. Nur, wenn diese $2p$ Gleichungen von einander abhängig sind, enthält s' mehr als $m - p + 1$ Constanten.

Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, nehmen wir für die endlich bleibenden Integrale $w_1 \dots w_p$ die speciellen

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1(s, z) dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \quad \dots \quad u_p = \int \frac{\varphi_p(s, z) dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

welche *Riemann* als Argumente der ϑ -Function einführt. Das Integral u_μ hat an dem Querschnitte (a_μ) den Periodicitätsmodul πi , an den übrigen $p - 1$ Querschnitten (a) die Periodicitätsmoduln Null, und an dem Querschnitt (b_ν) den Periodicitätsmodul $a_{\mu,\nu}$. In der Nähe der Punkte ε gilt die Entwicklung

$$u_\mu = u_\mu(\varepsilon_k) + a_\mu^{(k)} \sigma_k + b_\mu^{(k)} \sigma_k^2 + \dots \quad (\text{a.})$$

Im Allgemeinen, d. h. wenn $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$ weder im Unendlichen liegen noch Verzweigungspunkte sind, ist

$$a_\mu^{(k)} = \frac{\varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}.$$

Die Integrale zweiter Gattung $t_1 \dots t_m$ können wir uns so gewählt denken, dass ihre Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten (a) verschwinden. Denn gesetzt, t_k hätte an den Querschnitten (a_1), $\dots$ (a_p) die Periodicitätsmoduln $\tau_{k,1}, \dots, \tau_{k,p}$, so hat man nur $t_k = t'_k + \frac{1}{\pi i} (\tau_{k,1} u_1 + \dots + \tau_{k,p} u_p)$ einzuführen, damit t'_k die angegebene Eigenschaft besitze. Dann reduciren sich die Bedingungen dafür, dass die Periodicitätsmoduln des Ausdruckes

$$s' = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \text{const.}$$

an den Querschnitten (a) verschwinden, auf die Gleichungen

$$\alpha_1 \pi i = 0, \quad \alpha_2 \pi i = 0, \quad \dots \quad \alpha_p \pi i = 0.$$

Die übrig bleibenden Constanten β sind nur noch den p Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Periodicitätsmoduln an den Querschnitten (b) unterworfen, welche im Folgenden entwickelt werden sollen.

Das ganze Integral $\int u_\mu dv$ durch die Begrenzung der Fläche T' (d. i. die durch die Querschnitte (a) und (b) einfach zusammenhängend gemachte

Fläche T) erstreckt, ist gleich $\int_+ (u_\mu - u_\mu^-) dv$, unter u_μ und u_μ^- die Werthe von u_μ auf den positiven und auf den negativen Seiten der Querschnitte verstanden und letzteres Integral positiv nur durch die positiven Seiten aller Querschnitte erstreckt. Dies ergibt als Betrag des Integrales, analog wie in §. 20. der *Riemannschen* Abhandlung:

$$\pi i B_\mu - \sum_{\nu=1 \dots p} A_\nu a_{\mu,\nu},$$

wo A und B die Periodicitätsmoduln von v an den Querschnitten (a) und (b) bezeichnen. — Andererseits ist das Integral $\int u_\mu dv$ gleich der Summe der um die Punkte ε herum erstreckten Integrale, wobei, wenn einer der Punkte ein $(n - 1)$ facher Verzweigungspunkt ist, die Curve, über welche um diesen Punkt

herum integrirt wird, n ganze Umläufe machen muss, um geschlossen zu sein. Auf diese Weise gelangt man zu der Gleichung

$$\pi i B_\mu - \sum_{\nu=1 \dots p} A_\nu a_{\mu, \nu} = -2\pi i \sum_{k=1 \dots m} \beta_k a_\mu^{(k)}, \quad (1.)$$

welche, da μ die Werthe $1, 2, \dots p$ annehmen kann, p Gleichungen repräsentirt und die Abhängigkeit der Periodicitätsmoduln A und B von der Lage der Punkte ε enthält.

Im Folgenden sei der Einfachheit wegen vorausgesetzt, dass alle Punkte ε im Endlichen liegen und nicht Verzweigungspunkte sind. Dann geht die Gleichung (1.) über in

$$\pi i B_\mu - \sum_{\nu=1 \dots p} A_\nu a_{\mu, \nu} = -2\pi i \sum_{k=1 \dots m} \frac{\beta_k \varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}. \quad (2.)$$

Mit Hülfe dieser Formel verwandeln sich die oben erwähnten p Gleichungen $B_1 = 0, B_2 = 0, \dots B_p = 0$, da die Periodicitätsmoduln A im vorliegenden Falle gleich Null sind, in

$$\sum_{k=1 \dots m} \frac{\beta_k \varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots p.$$

Von diesen p Gleichungen wird immer und auch nur dann eine eine Folge der übrigen, wenn sich p Coefficienten $c_1, \dots c_p$ in $\varphi = c_1 \varphi_1(s, z) + \dots + c_p \varphi_p(s, z)$ so bestimmen lassen, dass $\frac{\varphi(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}$ gleich Null ist für jeden der m Werthe von k ,

oder wenn die m Punkte ε solche sind, in denen ausser den r zusammengefallenen sich aufhebenden Verzweigungspunkten eine Function φ verschwinden kann.

Ebenso können zwei oder mehrere von den p Gleichungen aus den übrigen folgen und man kann das allgemeine Resultat in folgender Weise aussprechen:

Wird eine Function s' in m Punkten unendlich gross erster Ordnung und können in diesen m Punkten q Functionen $\frac{\varphi(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ verschwinden, zwischen denen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, so enthält s' die Zahl $m - p + 1 + q$ willkürlicher Constanten.

Sei z. B. $F(s, z) = 0$ die Gleichung einer Curve fünfter Ordnung. Dann ist im Allgemeinen, d. h. wenn die Curve keinen Doppelpunkt besitzt, $p = 6$; die endlich bleibenden Integrale sind:

$$\int \frac{as^2 + bsz + cz^2 + ds + ez + f}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

also jede ganze Function zweiten Grades ist eine Function φ . Die Function

$$s' = \frac{as + bz + c}{a_1s + b_1z + c_1}$$

wird in den 5 Punkten unendlich, in denen die Gerade $a_1s + b_1z + c_1 = 0$ die gegebene Curve schneidet. In diesen 5 Punkten verschwinden 3 von einander linear unabhängige Functionen φ , nämlich: $a_1s + b_1z + c_1$, $(a_1s + b_1z + c_1)s$ und $(a_1s + b_1z + c_1)z$. Daher enthält s' die Anzahl $5 - 6 + 1 + 3 = 3$ willkürlicher Constanten, in der That die a, b, c .

Hat die gegebene Curve fünften Grades einen Doppelpunkt, so ist $p = 5$. Dann sind, wenn $g = 0, h = 0$ zwei durch den Doppelpunkt gehende Gerade bedeuten, nur $(a_1s + b_1z + c_1)g$ und $(a_1s + b_1z + c_1)h$ Functionen φ , die in den 5 Punkten Null sind, in denen s' unendlich ist und s' enthält wiederum $5 - 5 + 1 + 2 = 3$ Constanten.

Liegen die Punkte ε theilweise im Unendlichen, so muss man nach der Anzahl von Functionen φ fragen, die von niedrigerem als dem höchst möglichen Grade sind und in den Punkten ε verschwinden, die im Endlichen liegen.

Bei ganz allgemeiner Lage der Punkte ε lässt sich die Regel über die Anzahl der Constanten nur so fassen: Sind $c_1 \dots c_p$ zu bestimmende Constanten und sind die endlich bleibenden Integrale durch die Reihen (a) dargestellt, so enthält eine algebraische Function, die in m Punkten unendlich erster Ordnung ist, $m - p + 1 + q$ willkürliche Constanten, wenn es q nicht linear von einander abhängige Functionen

$$c_1a_1 + \dots + c_pa_p, \quad a_\nu = \frac{du_\nu(s, z)}{d\sigma}$$

giebt, welche in den Punkten ε verschwinden.

Für die Bestimmung der Functionen, die in einzelnen Punkten unendlich von höherer Ordnung werden, kann man entweder in dem Vorigen Punkte ε auf einander fallen lassen oder die Betrachtungen selbstständig anstellen durch Benutzung der Coefficienten höherer Potenzen von σ in den Reihen (a).

Die Gleichungen (1.) enthalten Resultate für die ganzen Integrale zweiter Gattung, welche von *Weierstrass* für hyperelliptische Integrale schon früher gegeben worden sind.

Halle, 1864.