

30. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes.

(Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.)

1.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x , et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a comme on sait la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions transcendentes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme *intégrales de différentielles algébriques quelconques*. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données, par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique*). Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse en même tems les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

$$\psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}}, \quad (1)$$

*) J'ai présenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826. *Note de l'auteur.*

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit φx une fonction entière de x , décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs entiers $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, ensorte que $\varphi x = \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x$. Soit $f x$ une autre fonction entière quelconque et

$$\psi x = \int \frac{f x \partial x}{(x - \alpha) \sqrt{\varphi x}}, \quad (2)$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2, \dots; c_0, c_1, c_2, \dots$ des quantités quelconques dont l'une au moins soit variable. Cela posé, si l'on fait

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)^2 \cdot \varphi_1x - (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m)^2 \cdot \varphi_2x \quad (3)$$

$$= A \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_\mu),$$

où A ne dépend pas de x , je dis qu'on aura

$$\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu \quad (4)$$

$$= \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1\alpha} + (c_0 + c_1\alpha + \dots + c_m\alpha^m)\sqrt{\varphi_2\alpha}}{(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1\alpha} - (c_0 + c_1\alpha + \dots + c_m\alpha^m)\sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\} + r + C,$$

où C est une quantité constante et r le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{fx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \cdot \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\sqrt{\varphi_1x} + (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)\sqrt{\varphi_2x}}{(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\sqrt{\varphi_1x} - (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)\sqrt{\varphi_2x}} \right\},$$

suivant les puissances descendantes de x . Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ sont égales à $+1$ ou à -1 , et leurs valeurs dépendent de celles des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3.) par Fx et faisons pour abréger:

$$\theta x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (5)$$

$$\theta_1x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m,$$

nous aurons

$$Fx = (\theta x)^2 \cdot \varphi_1x - (\theta_1x)^2 \cdot \varphi_2x. \quad (6)$$

Cela posé, soit x une quelconque des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, on aura l'équation

$$Fx = 0. \quad (7)$$

De là, en différentiant, on tire

$$F'x \cdot \partial x + \delta Fx = 0, \quad (8)$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x , et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités $a_0, a_1, a_2, \dots; c_0, c_1, c_2, \dots$. Or en remarquant que φ_1x et φ_2x sont indépendants de ces dernières variables, l'équation donnera:

$$\delta Fx = 2\theta x \cdot \varphi_1x \cdot \delta\theta x - 2\theta_1x \cdot \varphi_2x \cdot \delta\theta_1x, \quad (9)$$

donc en vertu de (8.)

$$F'x \cdot \partial x = 2\theta_1x \cdot \varphi_2x \cdot \delta\theta_1x - 2\theta x \cdot \varphi_1x \cdot \delta\theta x. \quad (10)$$

Maintenant ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x$, on en tire:

$$\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}, \quad (11)$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là vient

$$\theta x \cdot \varphi_1 x = \varepsilon \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_1 x \cdot \varphi_2 x} = \varepsilon \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi x},$$

$$\theta_1 x \cdot \varphi_2 x = \varepsilon \theta x \cdot \sqrt{\varphi_2 x \cdot \varphi_1 x} = \varepsilon \theta x \cdot \sqrt{\varphi x},$$

donc l'expression de $F'x \cdot \partial x$ pourra être mise sous la forme

$$F'x \cdot \partial x = 2\varepsilon \cdot \{\theta x \cdot \delta \theta_1 x - \theta_1 x \cdot \delta \theta x\} \cdot \sqrt{\varphi x}. \quad (12)$$

Cela donne, en multipliant par $\varepsilon \cdot \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \cdot \frac{1}{F'x} \cdot \frac{1}{x - \alpha}$:

$$\varepsilon \cdot \frac{fx \cdot \partial x}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{fx \cdot (2\theta x \cdot \delta \theta_1 x - 2\theta_1 x \cdot \delta \theta x)}{(x - \alpha)F'x}. \quad (13)$$

En faisant pour abréger

$$\lambda(x) = 2fx(\theta x \cdot \delta \theta_1 x - \theta_1 x \cdot \delta \theta x), \quad (14')$$

il viendra:¹

$$\varepsilon \cdot \frac{fy \cdot \partial x}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\lambda x}{(x - \alpha) \cdot F'x}, \quad (14)$$

où λx sera une fonction *entière* par rapport à x .

Désignons par $\Sigma \Gamma x$ la quantité

$$\Gamma x_1 + \Gamma x_2 + \Gamma x_3 + \dots + \Gamma x_\mu,$$

et remarquons que l'équation (14.) subsiste encore en mettant l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ au lieu de x , cette équation donnera

$$\Sigma \varepsilon \cdot \frac{fx \cdot \partial x}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\lambda x}{(x - \alpha)F'x} = \delta v. \quad (15)$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx , on peut supposer

$$\lambda x = (x - \alpha) \cdot \lambda_1 x + \lambda \alpha,$$

où $\lambda_1 x$ est une fonction entière de x , savoir $\frac{\lambda x - \lambda \alpha}{x - \alpha}$. En substituant cette valeur dans (15.), il viendra

$$\delta v = \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda \alpha \cdot \Sigma \frac{1}{(x - \alpha)F'x}. \quad (16')$$

¹*Editorial note:* The numerator of the following display is printed " $fy \cdot \partial x$ "; the left member of (13.), from which this follows, has fx , so " fy " is a misprint for fx .

Maintenant d'après une formule connue on aura

$$\Sigma \frac{1}{(x - \alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha}, \quad (17)$$

ayant égard que

$$F\alpha = A(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \dots (\alpha - x_\mu),$$

donc

$$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}. \quad (18)$$

Il reste à trouver $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17.). En effet en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ selon les puissances descendantes de α , il viendra²

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \Sigma \frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \Sigma \frac{1}{F'x} + \dots + \frac{1}{\alpha^{k+1}} \cdot \Sigma \frac{x^k}{F'x} + \dots \quad (19)$$

d'où l'on voit que $\Sigma \frac{x^k}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x , sera égal au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{F\alpha}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abrégé on désigne ce coefficient compris dans une fonction quelconque r développable de cette manière par Πr , on aura:

$$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx}. \quad (20)$$

Or la formule (16.), en divisant par $Fx \cdot (x - \alpha)$, donne

$$\Pi \cdot \frac{\lambda x}{(x - \alpha)Fx} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx}, \quad (21)$$

en remarquant que $\Pi \frac{\lambda\alpha}{(x - \alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'expression (16.) de δv deviendra

$$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Pi \frac{\lambda x}{(x - \alpha)Fx}. \quad (22)$$

²*Editorial note:* In the following display the numerator of the second term is printed "1"; the expansion requires x , as the general term x^k shows. A later reader has pencilled an "x" above it in the copy scanned here; that annotation is not part of the print and is not transcribed.

Maintenant on a (14')

$$\lambda x = 2fx \cdot \{\theta x \cdot \delta\theta_1 x - \theta_1 x \cdot \delta\theta x\},$$

donc en mettant λ au lieu de x ,³

$$\lambda\alpha = 2f\alpha\{\theta\alpha \cdot \delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha \cdot \delta\theta\alpha\}.$$

En vertu de cette expression et en substituant pour Fx sa valeur $(\theta\alpha)^2 \cdot \varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2 \cdot \varphi_2\alpha$, on obtiendra⁴

$$\partial v = -\frac{2f\alpha \cdot (\theta\alpha \cdot \delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha \cdot \delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2 \cdot \varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2 \cdot \varphi_2\alpha} + \Pi \frac{2fx}{x - \alpha} \cdot \frac{\theta x \cdot \delta\theta_1 x - \theta_1 x \cdot \delta\theta x}{(\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx , $x - \alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ sont des quantités constantes, on aura en vertu de la formule

$$\begin{aligned} \int \frac{p\partial q - q\partial p}{p^2 m - q^2 n} &= \frac{1}{2\sqrt{m \cdot n}} \log \cdot \left\{ \frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}} \right\} : \\ v &= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\} \\ &+ \Pi \frac{fx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Or l'équation (15.) donne

$$\Sigma \varepsilon \int \frac{fx \cdot \partial x}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} = v,$$

donc en faisant

$$\psi(x) = \int \frac{fx \cdot \partial x}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \quad (24)$$

et désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\mu$ des quantités de la forme ± 1 , on aura la formule⁵

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu = \\ C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\} \\ + \Pi \frac{fx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

³Editorial note: The letter substituted for x is printed “ λ ”; the substitution actually made is $x = \alpha$, as the resulting formula $\lambda\alpha = 2f\alpha\{\dots\}$ shows, so “ λ ” is a misprint for α .

⁴Editorial note: Two misprints in the following display. Its left member is printed “ ∂v ” but is the δv of (22.). In the last denominator “ $(\theta_1\alpha)^2$ ” should be $(\theta_1 x)^2$: the whole term is a function of x , and (6.) gives $Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$.

⁵Editorial note: In the following display the radicand of the last denominator is printed transposed, “ $\sqrt{(x\varphi)}$ ”; every other occurrence, including (23.) and (28.), has $\sqrt{(\varphi x)}$.

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4.).

Les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\mu$ ne sont pas arbitraires, elles dépendent de la grandeur de $x_1, x_2, \dots x_\mu$ et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x},$$

équivalente aux équations

$$\theta x_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \cdot \theta_1 x_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 x_1}; \quad \theta x_2 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2 \theta_1 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2}; \dots \quad (26)$$

$$\theta x_\mu \cdot \sqrt{\varphi_1 x_\mu} = \varepsilon_\mu \theta_1 x_\mu \sqrt{\varphi_2 x_\mu}.$$

D'ailleurs les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\mu$ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_\mu$, comprises dans certaines limites. Il en sera de même de la constante C .

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités $x_1, x^2, \dots x_\mu$, différentes entre-elles,⁶ car dans le cas contraire $F'x$ seroit égal à zéro pour un certain nombre de valeurs de x , et alors le second membre de la formule (14.) se présenteroit sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident, que la formule (25.) subsistera encors dans le cas même, ou plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ sont égales entre-elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26.)

$$\theta x_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x \varphi_2 x$ et $\theta x \cdot \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant:

Théorème II. Si l'on fait

$$(\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x = A \cdot (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_\mu)^{m_\mu}, \quad (27)$$

où les fonctions entières $\theta x \cdot \varphi_1 x$ et $\theta_1 x \cdot \varphi_2 x$ n'ont pas de diviseur commun, on aura:⁷

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu = \quad (28)$$

$$C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\} \\ + \Pi \frac{fx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}} \right\}.$$

⁶Editorial note: The second entry in this list is printed as a superscript, " x^2 "; the list is $x_1, x_2, \dots x_\mu$ everywhere else, so this is a misprint for the subscript x_2 .

⁷Editorial note: The last term of the following display is printed " $\psi(x_\mu$ ", with an opening parenthesis that is never closed; (25.) and (29.) both write this term ψx_μ .

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x-\alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $fx \cdot (x-\alpha)$ au lieu de fx , il viendra:

Théorème III. Les choses étant supposées les mêmes que dans le 2. Théorème, si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot \partial x}{\sqrt{\varphi x}},$$

où fx est une fonction entière quelconque, on aura

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \log \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

5.

Si dans la formule ci-dessus on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx , il est clair que la partie du second membre affecté du signe Π , s'évanouira. Donc on aura ce theoreme:

Théorème IV. Si le degré de la fonction entière $(fx)^2$ est moindre que celui de φx , et qu'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} :$$

on aura

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant

Théorème V. Si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^k \sqrt{\varphi x}},$$

on aura

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C - \frac{1}{1.2 \dots (k-1)} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial \alpha^{k-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{\varphi_2\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

7.

Si dans le théorème III. on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx , le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. Si l'on désigne par ψx la fonction

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \dots + \delta_{\nu'} \cdot x^{\nu'}) \partial x}{\sqrt{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_{\nu} x^{\nu}}},$$

où $\nu' = \frac{\nu - 1}{2} - 1$, si ν est impair, et $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ si ν est pair, on aura toujours:

$$\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \dots + \varepsilon_{\mu} m_{\mu} \psi(x_{\mu}) = \text{à une constante.} \quad (31)$$

On voit que ν' a la même valeur pour $\nu = 2m - 1$ et pour $\nu = 2m$, savoir $\nu'' = m - 2$.⁸

8.

Soit maintenant

$$\psi x = \int \frac{r \partial x}{\sqrt{\varphi x}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x . Quelle que soit la forme de r , on pourra toujours faire⁹

$$r = fx + \frac{f_1 x}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{f_{\omega} x_{\omega}}{(x - \alpha_{\omega})^{k_{\omega}}}, \quad (32)$$

où $fx, f_1 x, f_2 x, \dots, f_{\omega} x$ sont des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III. et V. on aura le suivant: *Théorème VII. Quelle que soit la fonction rationnelle r , exprimée par la formule (32.), en faisant*

$$\psi x = \int \frac{r \partial x}{\sqrt{\varphi x}} \quad \text{et} \quad \frac{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x}} = \chi x : \quad (33)$$

on aura toujours:¹⁰

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_{\mu} m_{\mu} \psi x_{\mu} = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{\varphi x}} \log \chi(x) \quad (34)$$

⁸ *Editorial note:* Printed with two prime marks, " ν'' "; the quantity defined just above and used throughout is ν' .

⁹ *Editorial note:* In the following display the last numerator is printed " $f_{\omega} x_{\omega}$ "; the sentence immediately following lists these numerators as $fx, f_1 x, f_2 x, \dots, f_{\omega} x$, so the subscript on x is a misprint.

¹⁰ *Editorial note:* In the second term of the following display the derivative is printed " $\partial \alpha_1^{k_2-1}$ "; it must be taken with respect to α_2 , as the first and third terms (α_1 with k_1 , α_{ω} with k_{ω}) show.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \alpha_1^{k_1-1}} \cdot \frac{f_1 \alpha_1}{\sqrt{\varphi \alpha_1}} \log \chi \alpha_1 - \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{\partial^{k_2-1}}{\partial \alpha_2^{k_2-1}} \cdot \frac{f_2 \alpha_2}{\sqrt{\varphi \alpha_2}} \cdot \log \chi \alpha_2 - \dots \\
& -\frac{1}{\Gamma k_\omega} \cdot \frac{\partial^{k_\omega-1}}{\partial \alpha_\omega^{k_\omega-1}} \cdot \frac{f_\omega \alpha_\omega}{\sqrt{\varphi \alpha_\omega}} \log \chi \alpha_\omega,
\end{aligned}$$

en représentant par $\Gamma(k)$ le produit $1.2.3 \dots (k-1)$.

9.

Précédemment nous avons considéré les quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ comme des fonctions de $a_0, a_1, a_2, \dots c_0, c_1, c_2, \dots$. Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient $x_1, x_2, \dots x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$ de manière que le premier membre de l'équation (3.) soit divisible par

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\mu).$$

Cela se fera à l'aide des équations (26.). Les μ' premières équations¹¹

$$\begin{aligned}
\theta x_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_1} &= \varepsilon_1 \cdot \theta_1 x_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 x_1}, \\
\theta x_2 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_2} &= \varepsilon_2 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \sqrt{\varphi_2 x_2}, \\
&\dots\dots\dots \\
\theta x_{\mu'} \cdot \sqrt{\varphi_1 x_{\mu'}} &= \varepsilon_{\mu'} \cdot \theta_1 x_{\mu'} \cdot \sqrt{\varphi_2 x_{\mu'}}
\end{aligned}$$

donneront un nombre μ' des quantités $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$ exprimées en fonctions rationnelles des autres et de $x_1, x_2, \dots x_{\mu'}$; $\sqrt{\varphi_1 x_1}, \sqrt{\varphi_2 x_2}, \dots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \dots a_n, c_0, c_1, \dots c_m$ est égal à $m+n+1$; donc, comme il est aisé de voir par la forme des équations (35.), on pourra faire $\mu' = m+n+1$. Cela posé, en substituant les valeurs de $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$ dans les fonctions $\theta x, \theta_1 x, \dots$, la fonction entière $(\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x$ deviendra divisible par

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\mu).$$

Désignant le quotient par R , on aura

$$R = A(x - x_{\mu'+1})(x - x_{\mu'+2}) \dots (x - x_\mu). \quad (36)$$

Donc les $\mu - \mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \dots x_\mu$, seront les racines d'une équation $R = 0$ de degré $\mu - \mu'$, dont tous les coefficients sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots x_{\mu'}$; $\sqrt{\varphi_1 x_1}, \sqrt{\varphi_2 x_2}, \dots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

¹¹*Editorial note:* The system that follows carries no number in the print, though the text refers to it three times as "(35.)". In the copy scanned here a later hand has pencilled "35." and a brace beside it; that annotation is not part of the print and is not transcribed.

Faisons¹²

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{\mu_1} = 1, \\ \varepsilon_{\mu_1+1} &= \varepsilon_{\mu_1+2} = \dots = \varepsilon_{\mu'} = -1, \\ x_{\mu_1+1} &= x'_1, \quad x_{\mu_1+2} = x'_1, \dots, x_{\mu'} = x'_{\mu_2}, \\ x_{\mu'+1} &= y_1, \quad x_{\mu'+2} = y_2, \dots, x_{\mu} = y_{\nu'},\end{aligned}$$

en aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int \frac{r \partial x}{\sqrt{\varphi x}}$,¹³

$$\begin{aligned}\psi x_2 + \psi x_2 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \dots - \psi x'_{\mu_2} \\ = v - \psi y_1 - \psi y_2 - \psi y_3 - \dots - \psi y_{\nu'},\end{aligned}\tag{37}$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités $x_1, x_2, \dots, x_{\mu_1}; x'_1, x'_2, \dots, x'_{\mu_2}$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \dots, y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν' .

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' indépendant du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données. En effet cherchons la plus petite valeur de ν' .

En supposant indéterminées toutes les quantités $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n + \nu_1$ et $2m + \nu_2$, où ν_1 et ν_2 représentent les degrés des fonctions $\varphi_1 x, \varphi_2 x$. Soit p. ex.

$$\mu = 2n + \nu_1,$$

on doit avoir en même tems:

$$\mu \geq 2m + \nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu \geq m + n + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

ou

$$\nu' = \mu - \mu' = \mu - m - n - 1,$$

donc

$$\nu' \geq \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - 1,$$

ou bien, désignans le degré de φx par ν ,

$$\nu' \geq \frac{\nu}{2} - 1.\tag{38'}$$

¹²*Editorial note:* The third line below is printed " $x_{\mu_1+2} = x'_1$ "; it should read x'_2 , as the pattern and the sums (37.) and (39.) require.

¹³*Editorial note:* The first term of the following display is printed " ψx_2 ", duplicating the second; it should be ψx_1 .

De là on voit, que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu-1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2}-1$, selon que ν est impair ou pair.

Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données; elle est précisément la même que le nombre total des coefficients $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ dans le 6^{me} théorème. On aura maintenant ce théorème:

*Théorème VIII. Soit $\psi x = \int \frac{r \partial x}{\sqrt{\varphi x}}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x , et φx une fonction entière de degré $2\nu - 1$ ou 2ν , et soient $x_1, x_2, \dots, x_{\mu}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{\mu_2}$ des variables données. Cela posé, quel que soit le nombre $\mu_1 + \mu_2$ des variables, on pourra toujours trouver au moyen une équation algébrique, $\nu - 1$ quantités $y_1, y_2, \dots, y_{\nu-1}$, telles que:*¹⁴

$$\begin{aligned} \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \dots - \psi x'_{\mu_2} \\ = v + \varepsilon_1 \cdot \psi y_1 + \varepsilon_2 \psi y_2 + \dots + \varepsilon_{\nu-1} \psi y_{\nu-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

v étant algébrique et logarithmique, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\nu-1}$ égales à $+1$ ou à -1 .

On peut ajouter que les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_{\nu-1}$ restent les mêmes, quelle que soit la forme de la fonction rationnelle r , et que la fonction v ne change pas de valeur en ajoutant à r une fonction entière quelconque du degré $\nu - 2$.

10.

Les équations (35.) qui déterminent les quantités $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$ deviendront en vertu de la formule (39.)¹⁵

$$\begin{aligned} \theta x_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_1} &= \theta_1 x_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 x_1}; & \theta x'_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 x'_1} &= -\theta'_1 x'_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 x'_1}, \\ \theta x_2 \cdot \sqrt{\varphi_1 x_2} &= \theta_1 x_2 \cdot \sqrt{\varphi_2 x_2}; & \theta x'_2 \cdot \sqrt{\varphi_1 x'_2} &= -\theta'_1 x'_2 \cdot \sqrt{\varphi_2 x'_2}, \\ & \dots \dots \dots & & \\ \theta x_{\mu_1} \cdot \sqrt{\varphi_1 x_{\mu_1}} &= \theta_1 x_{\mu_1} \cdot \sqrt{\varphi_2 x_{\mu_1}}; & \theta x'_{\mu_2} \cdot \sqrt{\varphi_1 x'_{\mu_2}} &= -\theta'_1 x'_{\mu_2} \cdot \sqrt{\varphi_2 x'_{\mu_2}} \end{aligned} \quad (40)$$

Pour déterminer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\nu-1}$, on aura les équations:¹⁶

$$\begin{aligned} \theta y_1 \cdot \sqrt{\varphi_1 y_1} &= \varepsilon_1 \theta_1 y_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 y_1}, \\ \theta y_2 \cdot \sqrt{\varphi_1 y_2} &= \varepsilon_2 \theta_1 y_1 \cdot \sqrt{\varphi_2 y_2}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (41)$$

¹⁴ *Editorial note:* Two misprints in the following display: the term $-\psi x'_1$ is printed twice (the second should be $-\psi x'_2$, and the following $-\psi x'_2$ then continues the sequence), and the last ψ carries a prime, " $\psi' x'_{\mu_2}$ ", which no other occurrence has.

¹⁵ *Editorial note:* Three misprints in the system that follows: in the first row " θ'_1 " carries a prime the other rows do not; in the second row the radicand " $\sqrt{\varphi_1 x'_1}$ " should be $\sqrt{\varphi_1 x'_2}$; in the last row " $\sqrt{\varphi_1 x_{\mu_2}}$ " lacks the prime on x .

¹⁶ *Editorial note:* The second equation below is printed with " $\theta_1 y_1$ "; the first and last rows show that the right member must be $\varepsilon_2 \theta_1 y_2 \cdot \sqrt{\varphi_2 y_2}$.

$$\theta y_{\nu-1} \cdot \sqrt{\varphi_1 y_{\nu-1}} = \varepsilon_{\nu-1} \theta_1 y_{\nu-1} \cdot \sqrt{\varphi_2 y_{\nu-1}}.$$

Les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_{\nu-1}$ sont les racines de l'équation¹⁷

$$\frac{(\theta y)^2 \cdot \varphi_1 y - (\theta_1 y)^2 \cdot \varphi_2 y}{(y - \chi_1)(y - x_2) \dots (y - x_{\mu_1})(y - x'_1)(y - x'_2) \dots (y - x'_{\mu_2})} = 0. \quad (42)$$

Le degré de la fonction θy est $n = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \nu - 1 - \nu_1}{2}$ et celui de $\theta_1 y$ est $m = n + \nu_1 - \nu$.

11.

La formule (39.) a lieu si plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots$ sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40.) ne suffisent plus pour déterminer les quantités $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$; car si p. ex. $x_1 = x_2 = \dots = x_k$, les k premières des équations (40.) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas, soit pour abréger

$$\theta x \cdot \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \cdot \sqrt{\varphi_2 x} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x - x_1)^{k_1}}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. De là on tire d'après les principes du calcul différentiel, les k équations¹⁸

$$\lambda x_1 = 0; \quad \lambda' x_1 = 0; \quad \lambda'' x_1 = 0; \quad \dots \quad \lambda^{(k-1)} x_1 = 0, \quad (42)$$

et ce sont elles, qu'il faut substituer à la place des équations¹⁹

$$\lambda x = 0, \quad \lambda x_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \dots = x_k$.

¹⁷ *Editorial note:* In the following display the first factor of the denominator is printed with a chi, “ $(y - \chi_1)$ ”; it should be $(y - x_1)$.

¹⁸ *Editorial note:* The following display is numbered “42.” in the print, repeating the number already given on p. 322; the sequence requires 43.

¹⁹ *Editorial note:* The first of the equations below is printed “ $\lambda x = 0$ ” without a subscript; the list runs over $x_1, x_2, \dots, x_k$, so it should read $\lambda x_1 = 0$.